AI-1209

B. A. / B. Sc. (Part-III)

Term End Examination, 2020-21

MATHEMATICS

Paper : First

Time Allowed : Three hours

Maximum Marks : 50

नोट : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान है। प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं ***दो*** *भागों को हल करें।*

Note : Answer all questions. All questions carry equal marks. Attempt any ***two*** *parts from each question.*

इकाई-I

Unit-I

1. (a) फलन $f(x) = x\cos x$ के लिए अंतराल $(-\pi, \pi)$ में फूरियर श्रेणी प्राप्त कीजिए।

Obtain Fourier series in the interval $(-\pi, \pi)$ for the function $f(x) = x\cos x$.

(b) दर्शाइए कि फलन

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

मूल बिन्दु पर अवकलनीय नहीं है यद्यपि (0, 0) पर आंशिक अवकलजों $\partial f/\partial x$ और $\partial f/\partial y$ का अस्तित्व है।

Show that the function

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2}; & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0; & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

is not differentiable at origin although partial derivatives $\partial f/\partial x$ and $\partial f/\partial y$ exist at (0, 0).

(c) दर्शाइए कि श्रेणी

$$2-\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{4}{3\sqrt{3}}-\frac{5}{4\sqrt{4}}+\ldots\ldots$$

अभिसारी है।

Show that the series

$$2-\frac{3}{2\sqrt{2}}+\frac{4}{3\sqrt{3}}-\frac{5}{4\sqrt{4}}+\ldots\ldots$$

is convergent.

इकाई-II
Unit-II

2. (a) रीमान समाकल के लिए डार्बू प्रमेय सिद्ध कीजिए।

Prove Darboux theorem for Riemann integral.

(b) विषम समाकल के प्रकार समझाइए। निम्न समाकल के अभिसरण का परीक्षण कीजिए—

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

Explain the kinds of improper integral. Test the convergence of the integral :

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(1+x)\sqrt{x}}$$

(c) प्राचल के सापेक्ष अवकलन की सहायता से दर्शाइए कि

$$\int_0^\pi \frac{\log(1+\alpha\cos x)}{\cos x}dx = \pi\sin^{-1}\alpha\,;$$

यदि $|\alpha|<1$।

With the help of differentiation with respect to parameters show that

$$\int_0^\pi \frac{\log(1+\alpha\cos x)}{\cos x}dx = \pi\sin^{-1}\alpha;$$

for $|\alpha|<1$.

इकाई-III
Unit-III

3. (a) यदि z_1, z_2, z_3 एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं, शीर्ष z_2 पर समकोण है, तो सिद्ध कीजिए कि

$$z_1^2+2z_2^2+z_3^2=2z_2(z_1+z_3)$$

If z_1, z_2, z_3 are the vertices of an isosceles triangle, right angled at the vertex z_2, then prove that $z_1^2+2z_2^2+z_3^2=2z_2(z_1+z_3)$.

(b) यदि $u-v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$ तथा $f(z)=u+iv$, $z=x+iy$ का एक विश्लेषिक फलन है, तब मिल्न थाम्सन विधि से $f(z)$ को z के पदों में ज्ञात कीजिए।

If $u-v=(x-y)(x^2+4xy+y^2)$ and $f(z)=u+iv$, is an analytic function of $z=x+iy$, then find $f(z)$ in terms of z by Milne-Thomson method.

(c) मोबियस रूपान्तरण एवं वज्रानुपात को परिभाषित कीजिए एवं उस मोबियस रूपान्तरण को ज्ञात कीजिए जो $z_1=0, z_2=1$ और $z_3=\infty$ को क्रमशः $w_1=1, w_2=i$ और $w_3=-1$ में प्रतिचित्रित करता है।

Define Mobius transformation and cross-ratio. Find the Mobius transformation which maps $z_1=0, z_2=1$ and $z_3=\infty$ into $w_1=1$, $w_2=i$ and $w_3=-1$, respectively.

इकाई-IV
Unit-IV

4. (a) सीमा बिन्दु परिभाषित कीजिए और सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि X का एक उपसमुच्चय A संवृत होता है यदि और केवल यदि X सभी सीमा बिन्दुओं को अन्तर्विष्ट करता है अर्थात $F \supseteq F'$।

Define limit points and prove that in a metric space X, a subset A of X is closed if and only if it contains all its limit points. $F \supseteq F'$.

(b) R में आर्किमिडीज गुणधर्म को सिद्ध कीजिए।

Prove that Archimedean property in R.

(c) मानलो d एक अरिक्त समुच्चय X पर एक दूरीक है। दर्शाइए कि अग्र रूप से परिभाषित फलन

$$d^*(x, y)=\frac{d(x, y)}{1+d(x, y)}$$

जहाँ $x, y \in X$, भी X पर एक दूरीक है।

Let (X, d) be a metric space. A mapping d^* is defined such that

$$d^*(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}, \forall\ x, y \in X$$

then show that d^* is a metrix on X.

इकाई-V
Unit-V

5. (a) सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक द्वितीय गणनीय दूरीक समष्टि गणनीय सघन होता है।

Prove that every second countable metric space is separable.

(b) सिद्ध कीजिए कि किसी संहत दूरीक समष्टि का एक संवृत्त उपसमुच्चय संहत होता है।

Prove that a closed subset of a compact metric space is compact.

(c) माना कि (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा $A \subseteq X$, यदि A संबद्ध विवृत और संवृत है, तब सिद्ध कीजिए कि A, X का संबद्ध घटक है।

Let (X, d) be a metric space and $A \subseteq X$. If A is connected, open and closed, then prove that A is a component of X.